COLEGIUL NAŢIONAL „ŞTEFAN CEL MARE” SUCEAVA	**CONCURSUL DE MATEMATICĂ „ACOLADA”, ediţia a XII-a, 03.06.2017**	ŞCOALA GIMNAZIALĂ NR. 1 BOGDĂNEŞTI JUDEŢUL SUCEAVA

Clasa a VI-a

1. a) Determinați numărul fracțiilor de forma $\dfrac{\overline{2a3b}}{\overline{c27d}}$, care se simplifică prin 18.

   b) Arătați că: $2017-\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}+\ldots+\dfrac{2016}{2017}\right)=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{2017}$.

2. a) Să se rezolve ecuația: $\left(1,5+\dfrac{1}{3}\right):\left[0,(6)+x\right]+\left[0,1(26):\dfrac{25}{198}+2\right]:0,2=15,25$.

   b) Aflați numerele naturale $a,b\in\mathbb{N}^*$, care verifică egalitatea $\dfrac{\overline{a,(b)}+\overline{b,(a)}}{a+b}=\dfrac{a+b}{3a}$.

3. a) Să se determine numerele prime a,b,c, știind că $\dfrac{a+2b}{12}=\dfrac{b+c}{14}=\dfrac{2c+a}{18}$.

   b) Fie numerele $A=\left[(-1)^{2017}\cdot(-1)^{2018}\right]^5\cdot a$, cu $a\in\mathbb{Z}$ și

   $B=(-1)^n+(-1)^{n+1}+(-1)^{n+2}+\left[(-1)^n\right]^{2016}+(-1)^{n-1}\cdot(-1)^{n+2}, n\in\mathbb{N}^*$. Determinați valorile numărului întreg a pentru care $|A|=|B|$.

4. Pe laturile AB și AC ale triunghiului isoscel $ABC\left([AB]\equiv[AC]\right)$ se consideră punctele M și N astfel încât $[AM]\equiv[AN]$.Perpendicularele în M și N pe AB, respectiv AC intersectează AC în E, respectiv pe AB în F. Să se demonstreze că:

   a) $[AE]\equiv[AF]; [BE]\equiv[CF]$.

   b) Dacă $\{P\}=FN\cap EM$, atunci $\sphericalangle MFP\equiv\sphericalangle NEP$.

   c) $AP\perp BC$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează de la 10 puncte la un punct.
Timp de lucru 2,5 ore

Clasa a VI-a

1. a) Determinați numărul fracțiilor de forma $\frac{\overline{2a3b}}{\overline{c27d}}$, care se simplifică prin 18.

b) Arătați că: $2017-\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+...+\frac{2016}{2017}\right)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2017}$.

Rezolvare și barem: a) $\overline{2a3b}\,\vdots\,18 \Leftrightarrow \overline{2a3b}\,\vdots\,9$ și $\overline{2a3b}\,\vdots\,2 \Leftrightarrow (5+a+b)\,\vdots\,9$ și $b\in\{0,2,4,6,8\}$, de unde rezultă că $(a,b)\in\{(4,0),(2,2),(0,4),(9,4),(7,6),(5,8)\}$ ....**3 puncte**

$\overline{c27d}\,\vdots\,18 \Leftrightarrow \overline{c27d}\,\vdots\,9$ și $d\in\{0,2,4,6,8\} \Leftrightarrow (c+d)\,\vdots\,9$ și $d\in\{0,2,4,6,8\}$, de unde obținem $(c,d)\in\{(9,0),(7,2),(5,4),(3,6),(1,8)\}$ ....**2 puncte**

În total avem 30 de fracții care se simplifică prin 18.............................. ....**1 punct**

b) $2017-\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+...+\frac{2016}{2017}\right)=1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{2}{3}\right)+...+\left(1-\frac{2016}{2017}\right)=$

$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2017}$ ....**3 puncte**

Oficiu...**1 punct**

2. a) Să se rezolve ecuația: $\left(1,5+\frac{1}{3}\right):\left[0,(6)+x\right]+\left[0,1(26):\frac{25}{198}+2\right]:0,2=15,25$.

b) Aflați numerele naturale $a,b\in\mathbb{N}^*$ care verifică egalitatea $\frac{\overline{a,(b)}+\overline{b,(a)}}{a+b}=\frac{a+b}{3a}$.

Rezolvare și barem: a) Ecuația este echivalentă cu:

$\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{3}\right):\left(\frac{2}{3}+x\right)+\left(\frac{125}{990}\cdot\frac{198}{25}+2\right)\cdot 5=15,25$ ....**3 puncte**

$\Leftrightarrow \frac{11}{6}:\left(\frac{2}{3}+x\right)+15=15,25 \Leftrightarrow x=\frac{20}{3}$ ....**2 puncte**

b) Aplicăm proprietatea fundamentală a proporțiilor și obținem:

$3a\left(a+b+\frac{a+b}{9}\right)=(a+b)^2$ ....**2 puncte**

Avem: $3a\cdot\frac{10}{9}=a+b \Leftrightarrow 7a=3b$ ……………………………………………………**1 punct**

Finalizare: Singura soluție a problemei este $a=3, b=7$ ……………………………**1 punct**

Oficiu……………………………………………………………………..…………..**1 punct**

3. a) Să se determine numerele prime a,b,c, știind că $\frac{a+2b}{12}=\frac{b+c}{14}=\frac{2c+a}{18}$.

b) Fie numerele $A=\left[(-1)^{2017}\cdot(-1)^{2018}\right]^5\cdot a, a\in\mathbb{Z}$ și

$B=(-1)^n+(-1)^{n+1}+(-1)^{n+2}+\left[(-1)^n\right]^{2016}+(-1)^{n-1}\cdot(-1)^{n+1}, n\in\mathbb{N}^*$. Determinați valorile numărului întreg a pentru care $|A|=|B|$.

Rezolvare și barem:a) Notăm cu k, $k\in\mathbb{N}$ valoarea comună a rapoartelor și obținem:

$a+b=12k, b+2c=14k, 2c+a=18k$ ………………………………………………**1 punct**

Deducem $a=k, b=\frac{11k}{2}, c=\frac{17k}{2}$ ……………………………………………………**2 puncte**

Finalizare $a=2, b=11, c=17$ ……………………………………………………..**1 punct**

b) $A=-a$ ………………………………………………………………………….**1 punct**

$B=(-1)^n$ ……………………………………………………..…………………**2 puncte**

$|A|=|B| \Leftrightarrow |a|=1 \Leftrightarrow a\in\{-1,1\}$ ……………………………………………………**2 puncte**

Oficiu………………………………………………………………………………**1 punct**

4. Pe laturile AB și AC ale triunghiului isoscel $ABC([AB]\equiv[AC])$ se consideră punctele M și N astfel încât $[AM]\equiv[AN]$.Perpendicularele în M și N pe AB, respectiv AC intersectează *AC* în *E*, respectiv pe *AB* în *F*. Să se demonstreze că:

a) $[AE]\equiv[AF]; [BE]\equiv[CF]$.

b) Dacă $\{P\}=FN\cap EM$, atunci $\triangle MFP\equiv\triangle NEP$.

c) $AP\perp BC$.

Rezolvare și barem:a) $\triangle AME\equiv\triangle ANF(C.U.)\Rightarrow[AF]\equiv[AE]$ ……………………. **2puncte**

Apoi $\triangle AFC\equiv\triangle AEB(L.U.L.)\Rightarrow[BE]\equiv[CF]$……………………………………..**1 punct**

b) $AF-AM=AE-AN\Rightarrow[MF]\equiv[NE]$. Dar $\angle MPF\equiv\angle NPE$ (op. vf.), de unde deducem congruența triunghiurilor $\triangle MFP\equiv\triangle NEP(C.U)$……………………………….... **3 puncte**

c) Din $\triangle MFP \equiv \triangle NEP$ rezultă $PM = PN$, adică P se află pe bisectoarea unghiului BAC. Cum $\triangle ABC$ este isoscel de bază $[BC]$, rezultă concluzia……………………………………**3 puncte**

Oficiu………………………………………………………………………………..**1 punct**