COLEGIUL NAŢIONAL „ŞTEFAN CEL MARE” SUCEAVA

**CONCURSUL DE MATEMATICĂ „ACOLADA”,**
**ediţia a XII-a, 03.06.2017**

ŞCOALA GIMNAZIALĂ NR. 1 BOGDĂNEŞTI JUDEŢUL SUCEAVA

# Clasa a VIII-a

1.a) Arătați că oricare ar fi numerele reale $a$ și $b$ are loc egalitatea:

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

b) Demonstrați că $27^{2017} + 3^{2018} + 1$ nu este număr prim.

2.Fie funcția $f:(-\infty,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{3}x - 2$.

a)Reprezentați graphic funcția într-un sistem de coordonate carteziene *XOY*.

b)Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $\sqrt{f^2(x)+6f(x)+9} \le 3$.

3.a) Determinați mulțimea valorilor lui $x$ pentru care expresia $E(x) = \frac{x^3-3x^2-x+3}{x^3-7x+6}$ are sens

și apoi aduceți expresia la forma cea mai simplă.

b) Arătați că expresia $E(x,y) = \frac{x+\sqrt{y^2+1}-y}{x\sqrt{y^2+1}+xy+1}$, nu depinde de $x$.

4.Fie *VABCD* o piramidă regulată în care triunghiul ACV este echilateral și $AV=a$.

a) Calculați măsura unghiului dintre dreapta *VB* și planul ABC.
b) Prin centrul de greutate al triunghiului *VBD* se constriește $MN \parallel BD$, unde

$M \in (VB), N \in (VD)$. Să se arate că $VA \perp (CMN)$.

**Notă:** Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează de la 10 puncte la 1 punct.
Timp de lucru 2,5 ore

COLEGIUL NAŢIONAL „ŞTEFAN CEL MARE” SUCEAVA

**CONCURSUL DE MATEMATICĂ „ACOLADA”,**
**ediţia a XII-a, 03.06.2017**

ŞCOALA GIMNAZIALĂ NR. 1 BOGDĂNEŞTI JUDEŢUL SUCEAVA

## Clasa a VIII-a

**1.** a) Arătați că oricare ar fi numerele reale *a* și *b* are loc egalitatea:
$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

b) Demonstrați că $27^{2017}+3^{2018}+1$ nu este număr prim.

**Rezolvare:**

a) Se demonstrează egalitatea.........................................................................3 puncte

b) Se scrie

$27^{2017}+3^{2018}+1=\left(3^{2017}\right)^3+3\cdot\left(3^{2017}\right)^2+3\cdot3^{2017}+1-3\cdot\left(3^{2017}\right)^2=\left(3^{2017}+1\right)^3-\left(3^{1345}\right)^3$.

..........................................................................................................4 puncte

Se justifică de ce numărul nu este prim ............................................................2 puncte

***2.*** Fie funcția $f:(-\infty,3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{3}x-2$.

a) Reprezentați funcția într-un sistem de axe perpendicular *XOY*.

b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $\sqrt{f^2(x)+6f(x)+9}\le3$.

**Rezolvare:**

a) Se reprezintă grafic funcția.............................................................4 puncte

b) Se obține inecuația echivalentă $|f(x)+3|\le3$ ................................... 2 puncte

Se rezolvă și se obține $x\in[-12,6]$ ..................................................2 puncte

$x\in[-12,6]\cap(-\infty,3]\Rightarrow x\in[-12,3]$ ......................................................1 punct

3.a) Determinați mulțimea valorilor lui $x$ pentru care expresia $E(x)=\dfrac{x^3-3x^2-x+3}{x^3-7x+6}$ are sens și apoi aduceți expresia la forma cea mai simplă.

b) Arătați că expresia $E(x,y)=\dfrac{x+\sqrt{y^2+1}-y}{x\sqrt{y^2+1}+xy+1}$, nu depinde de $x$.

**Rezolvare**

a) Se descompune numitorul și se obține $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3,1,2\}$ ……………………………2 puncte

$E(x)=\dfrac{(x-3)(x+1)}{(x+3)(x-2)}$ ………..……………………………………….………...2 puncte

b) $E(x,y)=\dfrac{x\left(\sqrt{y^2+1}+y\right)+1}{\left(x\sqrt{y^2+1}+xy+1\right)\left(\sqrt{y^2+1}+y\right)}$ …………………………..……………..3 puncte

$E(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{y^2+1}+y}$, deci $E(x,y)$ independentă de $x$……………………………..2 puncte

4.Fie $VABCD$ o piramidă regulată în care triunghiul ACV este echilateral și $AV=a$.

a) Calculați măsura unghiului dintre $VB$ și planul ABC.

b) Prin centrul de greutate al triunghiului $VBD$ construim $MN\parallel BD$, unde $M\in(VB), N\in(VD)$. Arătați că $VA\perp(CMN)$

**Rezolvare**

a) Se demonstrează că $m\left(\measuredangle\left(VB,(ABC)\right)\right)=m\left(\measuredangle VBD\right)$ …………………………………..2 puncte

Se arată că $\triangle VBD$ este echilateral…………………………………………………1 punct

$m\left(\measuredangle\left(VB,(ABC)\right)\right)=m\left(\measuredangle VBD\right)=60^\circ$ ……………………………………………………...1 punct

b) Se demonstrează că $VA\perp MN$ ……………………..………………………………1 punct

Se arată că $G$ ,centrul de greutate al $\triangle VBD$, este și centrul de greutate al $\triangle VAC$ ….2puncte

Se demonstrează că $VA\perp CG$ ………………………..………………………………1 punct

Se demonstrează că $VA\perp(CMN)$ ……………………………………………………1 punct

La fiecare subiect un punct se acordă din oficiu!