



COLEGIUL
NAȚIONAL
„ȘTEFAN CEL MARE”
SUCEAVA

CONCURSUL DE
MATEMATICĂ
„ACOLADA”,
ediția a XII-a, 03.06.2017

ȘCOALA
GIMNAZIALĂ NR. 1
BOGDĂNEȘTI
JUDEȚUL SUCEAVA

Clasa a VIII-a

1.a) Arătați că oricare ar fi numerele reale a și b are loc egalitatea:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

b) Demonstrați că $27^{2017} + 3^{2018} + 1$ nu este număr prim.

2. Fie funcția $f : (-\infty, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{3}x - 2$.

a) Reprezentați graphic funcția într-un sistem de coordonate carteziene XOY .

b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $\sqrt{f^2(x) + 6f(x) + 9} \leq 3$.

3.a) Determinați mulțimea valorilor lui x pentru care expresia $E(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^3 - 7x + 6}$ are sens

și apoi aduceți expresia la forma cea mai simplă.

b) Arătați că expresia $E(x, y) = \frac{x + \sqrt{y^2 + 1} - y}{x\sqrt{y^2 + 1} + xy + 1}$, nu depinde de x .

4. Fie $VABCD$ o piramidă regulată în care triunghiul ACV este echilateral și $AV = a$.

a) Calculați măsura unghiului dintre dreapta VB și planul ABC .

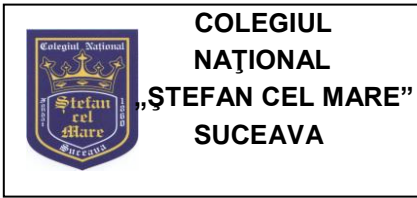
b) Prin centrul de greutate al triunghiului VBD se construiește $MN \parallel BD$, unde

$M \in (VB)$, $N \in (VD)$. Să se arate că $VA \perp (CMN)$.

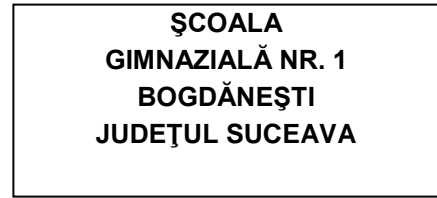
Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se notează de la 10 puncte la 1 punct.

Timp de lucru 2,5 ore



CONCURSUL DE
MATEMATICĂ
„ACOLADA”,
ediția a XII-a, 03.06.2017



Clasa a VIII-a

1. a) Arătați că oricare ar fi numerele reale a și b are loc egalitatea:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

b) Demonstrați că $27^{2017} + 3^{2018} + 1$ nu este număr prim.

Rezolvare:

a) Se demonstrează egalitatea.....3 puncte

b) Se scrie

$$27^{2017} + 3^{2018} + 1 = (3^{2017})^3 + 3 \cdot (3^{2017})^2 + 3 \cdot 3^{2017} + 1 - 3 \cdot (3^{2017})^2 = (3^{2017} + 1)^3 - (3^{1345})^3.$$

.....4 puncte

Se justifică de ce numărul nu este prim2 puncte

2. Fie funcția $f : (-\infty, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{3}x - 2$.

a) Reprezentați funcția într-un sistem de axe perpendicular XOY .

b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $\sqrt{f^2(x) + 6f(x) + 9} \leq 3$.

Rezolvare:

a) Se reprezintă grafic funcția.....4 puncte

b) Se obține inecuația echivalentă $|f(x) + 3| \leq 3$ 2 puncte

Se rezolvă și se obține $x \in [-12, 6]$ 2 puncte

$x \in [-12, 6] \cap (-\infty, 3] \Rightarrow x \in [-12, 3]$ 1 punct

3.a) Determinați mulțimea valorilor lui x pentru care expresia $E(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^3 - 7x + 6}$ are sens și apoi aduceți expresia la forma cea mai simplă.

b) Arătați că expresia $E(x, y) = \frac{x + \sqrt{y^2 + 1} - y}{x\sqrt{y^2 + 1} + xy + 1}$, nu depinde de x .

Rezolvare

a) Se descompune numitorul și se obține $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 1, 2\}$ 2 puncte

$E(x) = \frac{(x-3)(x+1)}{(x+3)(x-2)}$ 2 puncte

b) $E(x, y) = \frac{x(\sqrt{y^2 + 1} + y) + 1}{(x\sqrt{y^2 + 1} + xy + 1)(\sqrt{y^2 + 1} + y)}$ 3 puncte

$E(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1} + y}$, deci $E(x, y)$ independentă de x2 puncte

4. Fie $VABCD$ o piramidă regulată în care triunghiul ACV este echilateral și $AV=a$.

a) Calculați măsura unghiului dintre VB și planul ABC .

b) Prin centrul de greutate al triunghiului VBD construim $MN \parallel BD$, unde

$M \in (VB), N \in (VD)$. Arătați că $VA \perp (CMN)$

Rezolvare

a) Se demonstrează că $m(\overline{VB}, (ABC)) = m(\overline{VBD})$ 2 puncte

Se arată că $\square VBD$ este echilateral.....1 punct

$m(\overline{VB}, (ABC)) = m(\overline{VBD}) = 60^\circ$ 1 punct

b) Se demonstrează că $VA \perp MN$ 1 punct

Se arată că G , centrul de greutate al $\square VBD$, este și centrul de greutate al $\square VAC$ 2puncte

Se demonstrează că $VA \perp CG$ 1 punct

Se demonstrează că $VA \perp (CMN)$ 1 punct

La fiecare subiect un punct se acordă din oficiu!